Injections, surjections et bijections

–I33 TD 1 –

I. Comptage des fonctions

Exercice 1. Soit f une fonction d'un ensemble fini X de cardinal p dans un ensemble fini Y de cardinal n.

1. Combien y a-t-il d'applications de X dans Y ?
2. Combien y a-t-il de fonctions de X dans Y ?
3. Combien y a-t-il de bijections de X dans Y ?
4. Comparer le cardinal de X et le cardinal de Y, dans le cas d'une injection, d'une surjection ou d'une bijection.

II. Comptage des parties d'un ensemble fini

Exercice 2. $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties d'un ensemble fini X de cardinal n. Soit χ_E la fonction caractéristique d'un sous-ensemble E de X, définie par $\chi_E(x)$ vaut 1 si $x \in E$ et 0 sinon.

1. Quel est le cardinal de $\{0,1\}^n$?
2. Construire une bijection de $\mathcal{P}(X)$ dans $\{0,1\}^n$
3. En déduire le cardinal de $\mathcal{P}(X)$.
4. Faire une autre preuve en utilisant les coefficients binomiaux et la formule du binôme de Newton.

III. Densité des applications bijectives

Exercice 3. Soit p_n la probabilité qu'une application d'un ensemble fini X dans un ensemble fini Y soit bijective.

1. Etablir p_n en fonction de n le cardinal de X.
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$

IV. Sous-groupes des carrés

Exercice 4. Soit G un groupe fini abélien. Soit Q l'ensemble des carrés de G et N l'ensemble des non carrés.

1. Définir l'ensemble des carrés dans le cas d'un groupe additif $(G,+)$, puis d'un groupe multiplicatif $(G,*)$.
2. Montrer que Q est un sous-groupe de G.
3. Montrer que le produit d'un carré et d'un non carré est un non carré.
4. Le produit de deux non carrés est-il un carré ou un non carré ?
5. Verifier que pour $t \in N$, la fonction f_t de N de Q dans N qui à x associe $x * t$ est injective.
6. En déduire la cardinalité de Q en fonction de celle de G.
7. Calculer les carrés dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$

V. Comptons nos moutons

Exercice 5. On se propose de compter le nombre d'injections d'un ensemble X de cardinal p dans un ensemble Y de cardinal n en utilisant le lemme du berger. On note $\mathrm{INJ}(X,Y)$ l'ensemble des injections de X dans Y.

1. Rappeler l'enoncé du lemme du berger.
2. Montrer que l'application ϕ de $\mathrm{INJ}(X,Y)$ dans l'ensemble des parties à p éléments de Y, qui a une injection i lui associe son image $Im(i)$, est surjective.
3. Calculer le cardinal de $\phi^{-1}(Im(i))$
4. En déduire la cardinal de $\mathrm{INJ}(X,Y)$.