

Anneaux

-I33 TD 2 -

Exercice 1.

1. Trouver les inversibles et les diviseurs de zéros de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est-il un corps ou un anneau commutatif ou pas ?
3. Même question pour $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Exercice 2. On note $T_{2,S}(\mathbb{F}_2)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 triangulaire supérieure sur \mathbb{F}_2 .

1. Quel est le cardinal de $T_{2,S}(\mathbb{F}_2)$?
2. Cet anneau est-il commutatif ?
3. Trouver les diviseurs de zéro à gauche et à droite.
4. Déterminer les inversibles de $T_{2,S}(\mathbb{F}_2)$.

Exercice 3. Dans un anneau fini A , on veut montrer qu'un élément a est inversible à gauche ssi il est inversible à droite.

1. Montrer que si un élément a est inversible à gauche alors l'application g définie de A dans A par $g(x) = ax$ est injective.
2. En déduire que si a est inversible à gauche alors a l'est aussi à droite.
3. Montrer que si un élément a est inversible à droite alors l'application d définie de A dans A par $d(x) = xa$ est injective.
4. En déduire que si a est inversible à droite alors a l'est aussi à gauche.

Exercice 4. Dans un anneau quelconque A .

1. Montrer que si un élément est inversible à gauche et à droite alors les inverses sont les mêmes.
2. L'inverse d'un élément est unique.
3. 0 est absorbant.

Exercice 5.

1. Montrer qu'un groupe contient moins de 5 éléments est forcément commutatif.
2. Citer un groupe à 6 éléments non commutatifs.

Exercice 6.

1. Construire un corps à quatre éléments.