

Applications polynomiales

-I33 TD 3 -

Exercice 1.

1. Construire un polynôme unitaire de degré 2 sur $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ayant plus de 2 racines.
2. En déduire que sur un anneau même fini, un polynôme unitaire de degré n peut avoir plus de n racines.

Exercice 2.

1. Décrire toutes les permutations à quatre éléments.
2. Pour chaque permutation, déterminer si elle est polynomiale ou pas.
3. Quel est le nombre d'applications affines bijectives de $\{0, 1, 2, 3\}$ dans lui-même ?
4. Comparer le nombre de permutations polynomiales avec le nombre d'applications affines.
5. Montrer que l'ensemble des permutations polynomiales forment un sous-groupe du groupe des permutations.
6. En déduire le nombre de permutations polynomiales.

Exercice 3. Un ensemble K est un sous-corps d'un anneau A si :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in K^2, \quad x - y \in K \\ \forall (x, y) \in K^2, \quad xy \in K \\ \forall x \in K \setminus \{0\}, \quad x^{-1} \in K \\ 1_A \in K \end{aligned}$$

1. Montrer que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{F}_2$ est un corps.
2. Montrer que ce n'est pas un sous-corps de l'anneau des matrices carrées d'ordre 2 sur \mathbb{F}_2 .

Exercice 4. Un ensemble E est un K -espace vectoriel si $(E, +)$ est un groupe commutatif et si la loi externe \cdot définie de $K \times E$ dans E par $(\lambda, x) \mapsto \lambda.x$ vérifie les axiomes suivants :

- 1_K est neutre à gauche pour la loi \cdot :

$$\forall x \in E, \quad 1_K.x = x$$

- la loi \cdot est distributive à gauche par rapport à l'addition de E :

$$\forall \lambda \in K, \forall x, y \in E, \quad \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$$

- la loi \cdot est exodistributive \tilde{A} droite par rapport \tilde{A} l'addition du corps K :

$$\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in E, \quad (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.y$$

- a loi \cdot est exoassociative par rapport à la multiplication du corps :

$$\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in E, \quad (\lambda.\mu).x = \lambda.(\mu.x)$$

Soit K un sous-corps d'un corps L .

1. Montrer L est un K -espace vectoriel.
2. En déduire qu'il existe un entier n tel que $\#L = (\#K)^n$.

Exercice 5. Soit K un corps, on définit la caractéristique de K comme le plus petit entier $n > 0$ tel que $n.1_K = 0$, si cet entier n'existe pas on dit que le corps est de caractéristique nulle (comme par exemple \mathbb{R})

1. Montrer que cette définition est équivalente à n est le plus petit entier strictement positif tel que $\forall x \in K, n.x = 0$.
2. Montrer que la caractéristique d'un corps fini K est un nombre premier.(existence et primalité de la caractéristique).
3. Montrer que $k = \{0, 1.1_K, 2.1_K, 3.1_K, \dots, (p-1).1_K\}$ est un sous-corps d'un corps fini K de caractéristique p .
4. Montrer que si F est un sous-corps d'un corps K de caractéristique p alors k est un sous-corps de F .
5. Montrer que la cardinalité d'un corps fini K est p^n .