# Application linéaire & Codage

## –I33 TD 4 –

**Exercice 1.** Soit $E$ un $K$-espace vectoriel. L'ensemble des formes linéaires, appelé le dual de $E$, est noté $E^*$.

1. Montrer que $E^*$ est un $K$ espace vectoriel.
2. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$, soit $\varphi_i$ la forme linéaire définie par

$$\varphi_i(e_j) = \begin{cases} 1_K & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Vérifier que pour $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in E$, on a $\varphi_i(x) = x_i$.
3. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ est une $K$-base de $E^*$.
4. En déduire qu'un espace vectoriel et son dual ont la même dimension.

**Exercice 2.** Soit $E$ un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension $m$. Soit $f$ une application de $E$ dans $\mathbb{F}_2$. On définit le poids de $f$ par

$$\mathrm{wt}(f) = \#\{x \in E \mid f(x) = 1\}$$

Pour $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, on note

$$\vec{f} = \big(f(x_1), \ldots, f(x_N)\big)$$

Considérons $\Phi$ l'application de $E^*$ dans $\mathbb{F}_2^N$ définie par $\varphi \mapsto \vec{\varphi}$.

1. Montrer que $\Phi$ est linéaire.
2. Montrer que $\Phi$ est injective.
3. Montrer que $\mathrm{wt}(\vec{\varphi}) = \mathrm{wt}(\varphi) = 2^{m-1}$.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(\Phi)$ est une code binaire $C_m = (2^m, 2^m, 2^{m-1})$.

**Exercice 3.** Soit $C = C_m + (C_m + \vec{1})$ où $C_m$ est le code de l'exercice précédent.

1. Montrer que $\mathrm{wt}(\vec{1} + \vec{f}) = N - \mathrm{wt}(\vec{f})$.
2. Montrer que $C_m \cap (C_m + \vec{1}) = \emptyset$.
3. En déduire que $C$ est un code $(N, 2^{m+1}, 2^{m-1})$.
4. Construire un $(N-1, 2^{m+1}, 2^{m-1}-1)$ code.

**Exercice 4.** Soit $B(x, e)$ la boule de centre $x$ et de rayon $e$ sur $\mathbb{F}_2^n$.

1. Montrer que $\#B(x, e) = 1 + C_n^1 + \cdots + C_n^e$.
2. Montrer qu'il existe un code $(n, M, 2e+1)$ tel que $\#B(x, e) \times M \leq 2^n$.
3. Vérifier que le code $[7, 4, 3]$ est un $(N-1, 2^{m+1}, 2^{m-1}-1)$ code.
4. Montrer que le code $[7, 4, 3]$ est optimal.

**Exercice 5.** On considère la matrice génératrice d'un code $C$ définie par

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Utiliser le code de Gray pour énumérer tous les mots de $C$.
2. Calculer les paramètres de $C$.