

Code & Plan projectif fini

-I33 TD/TP 5 -

Exercice 1. On note $\text{Gray}_n(i) = i \oplus i/2$ le i -ième élément du code de Gray de longueur n .

1. Montrer par récurrence sur n que $\{\text{Gray}_n(i) \mid i = 0, \dots, 2^n - 1\} = \{i = 0, \dots, 2^n - 1\}$
2. Montrer que la distance de Hamming entre $\text{Gray}_n(i)$ et $\text{Gray}_n(i+1)$ vaut 1.
3. Calculer $\text{Gray}_n(0)$ et $\text{Gray}_n(2^n - 1)$.
4. Ecrire un programme qui énumère le code de Gray.
5. Calculer $\text{Gray}_n(i) \oplus \text{Gray}_n(i+1)$.
6. En utilisant le code de Gray, écrire un programme qui énumère les mots du code dont la matrice génératrice est :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. On définit la matrice d'incidence du plan projectif d'ordre n , de cardinal $n^2 + n + 1 = p$, comme la matrice $p \times p$ définie sur \mathbb{F}_2 par

$$\mathcal{I}(P, D) = \begin{cases} 1, & \text{si } P \in D; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où P est un point de \mathbb{P}^2 et D une droite.

1. Quelle est le cardinal de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$?
2. Construire la matrice \mathcal{I}_2 pour \mathbb{P}^2 d'ordre 2.
3. Quelle est la distance minimale entre deux mots du code de matrice génératrice \mathcal{I}_2 ?
4. Calculer le rang de cette matrice.